

# Véletlen gráfok

Előadó: Porvázsnnyik Bettina Lívia  
Témavezető: Dr. Fazekas István

Debreceni Egyetem, Informatikai Kar  
Alkalmazott Matematika és Valószínűségszámítás Tanszék

Hollókő, 2013. április 04-05.

- PhD-képzés: 2012. szeptember -
- Témavezető: Dr. Fazekas István
- Kutatási téma: Véletlen struktúrák vizsgálata
  - Általánosított elhelyezési séma
  - Véletlen gráfok

## Általánosított elhelyezési séma (Kolchin)

*Legyenek  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$  nemnegatív egész értékű valószínűségi változók. Ha léteznek olyan  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  független valószínűségi változók úgy, hogy az  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$  együttes eloszlására fennáll*







$$\mathbb{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbb{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^N \xi_i = n\right\},$$

*ahol  $k_1, k_2, \dots, k_N$  tetszőleges nemnegatív egész számok, akkor azt mondjuk, hogy az  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$  valószínűségi változók leírhatók az általánosított elhelyezési sémával.*

Az általánosított elhelyezési séma speciális esetei:

- véletlen elhelyezések
- véletlen erdők

# Általánosított elhelyezési séma

-  Rényi, A. Three new proofs and generalization of a theorem of Irving Weiss. *Magy. Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **7**(1-2) 203–214. (1962)
-  Békéssy, A. On classical occupancy problems. I. *Magy. Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **8**(1-2), 59–71. (1963)
-  Kolchin, V.F. Random Graphs. *Cambridge University Press, Cambridge, (1999).*
-  Pavlov, Yu. L. Random Forests. *VSP, Utrecht, (2000).*
-  Chuprunov, A.N. and Fazekas, I. An inequality for moments and its applications to the generalized allocation scheme. *Publ. Math. Debrecen*, **76** (2010), no. 3, 271–286.
-  Chuprunov, A.N. and Fazekas, I. One some analogue of the generalized allocation scheme. *Manuscript, (2011).*

# Eredmények

## Konferencia:

- Porvázsnyik B. A generalized allocation scheme. Debreceni Egyetem Természettudományi és Technológiai Kar Őszi Tudományos Diákköri Konferenciája, Debrecen, 2011. (előadás)
- Porvázsnyik B.: A generalized allocation scheme. Conference on Stochastic Models and their Applications, Debrecen, Hungary, August 22-24, 2011. (poszter)
- Porvázsnyik B.: A generalized allocation scheme. XXVI. microCAD Nemzetközi Tudományos Konferencia, Miskolc, 2012. (előadás)

## Cikk:

- Fazekas, I., Porvázsnyik B.: A generalized allocation scheme. *Annales Mathematicae et Informaticae* **39** (2012), pp. 57-70.

# Véletlen gráfok

A modell kapcsolódik a napjainkban nagyon népszerű véletlen gráfok vizsgálatához.

- Az Erdős - Rényi véletlen gráf modell (1960)
  - $\mathcal{G}(n, p)$   $n$  csúcsú véletlen gráf
  - minden élt egymástól függetlenül azonos  $p$  valószínűséggel húzunk be



Bollobás, B. *Random graphs*. 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, (2001).

# Véletlen gráfok

A nagy hálózatok közös jellemzője: a skálafüggetlenség

skálafüggetlenség:  $p_k \sim Ck^{-\gamma}$ , ha  $k \rightarrow \infty$ .

$\gamma$ : karakterisztikus kitevő

(A  $k$ -fokú csúcsok aránya 1 valószínűséggel konvergál valamely  $p_k$  pozitív számhoz, ahol  $p_k$  polinomiálisan csökken  $k \rightarrow \infty$  esetén.)

# Véletlen gráfok

A nagy hálózatok közös jellemzője: a skálafüggetlenség

## Példa

- *WWW (World Wide Web)*     $\gamma_{in} = 2.1$      $\gamma_{out} = 2.7$
- *The movie actor collaboration network*     $\gamma = 2.3 \pm 0.1$
- *Science collaboration graph*  
*The collaboration graph of mathematicians and neuroscientists publishing between 1991 and 1998*     $\gamma = 2.1 - 2.5$



Barabási, A.L., Albert, R. Emergence of scaling in random networks. *Science* **286** (1999), 509-512.



Barabási, A.L., Albert, R. Statistical Mechanics of Complex Networks. *Reviews of Modern Physics* **74** (2002), 47-97.

# Véletlen gráfok

- A Barabási-Albert véletlen gráf modell (1999)
  - Kiindulás: rögzített  $m_0$  csúcsot tartalmazó gráf
  - minden lépésben egy új csúcs keletkezik, amely  $m$  különböző régi csúcshoz kapcsolódik
  - az új csúcs egy régi csúcshoz annak fokszámával arányos valószínűséggel kapcsolódik (preferential attachment)



Durrett, R. *Random graph dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge UK, (2007).

# Eredmények

A Móri Tamás és Backhausz Ágnes által ismertetett 3 pont kölcsönhatásán alapuló véletlen gráf modell általánosítása, illetve a modellre vonatkozó bizonyos eredmények kiterjesztése a "4 pontos esetre"

Konferencia:

- Fazekas I., Porvázsnyik B.: Scale-free property for degrees and weights in a preferential attachment random graph model. XXVII. microCAD Nemzetközi Tudományos Konferencia, Miskolc, 2013. (előadás)

Kéziratban:

- Fazekas I., Porvázsnyik B.: Scale-free property for degrees and weights in a preferential attachment random graph model

# Fő motiváció

## Móri Tamás - Backhausz Ágnes: A háromszöges modell

- *Egyetlen háromszögből indulunk ki*
- *A háromszögben minden klikk kezdeti súlya 1*
- *Minden lépésben 3 csúcs lép kölcsönhatásba, mely 3 csúcs egy háromszöget határoz meg*
- *Az új háromszögben minden klikk súlyát eggyel növeljük*



Backhausz, Á., Móri, T. F. A random graph model based on 3-interactions. *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* **36** (2012), 41-52.



Backhausz, Á., Móri, T. F. Weights and degrees in a random graph model based on 3-interactions. arXiv:1206.0633v1 [math.PR] 4 Jun 2012

# Móri Tamás - Backhausz Ágnes: A háromszöges modell

A gráf fejlődése:

A múlttól függetlenül,

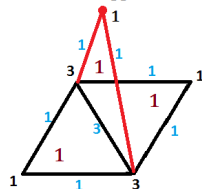
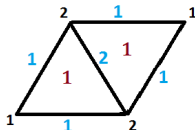
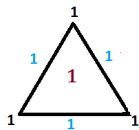
- $p$  valószínűséggel egy új csúcs csatlakozik a gráfhoz
  - $r$  valószínűséggel súlyarányosan választunk egy élt a már meglévő élek közül, melynek végpontjai az új csúccsal lépnek kölcsönhatásba (preferential attachment)
  - $1 - r$  valószínűséggel egyenletesen választunk két régi csúcsot, melyek az új csúccsal lépnek kölcsönhatásba
- $1 - p$  valószínűséggel három régi csúcs lép kölcsönhatásba
  - $q$  valószínűséggel súlyarányosan választunk egy háromszöget a már meglévő háromszögek közül
  - $1 - q$  valószínűséggel egyenletesen választunk három régi csúcsot

$0 < p \leq 1$ ,  $0 \leq r \leq 1$  és  $0 \leq q \leq 1$  a modell fix paraméterei.

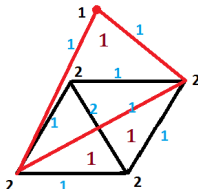
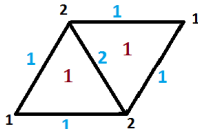
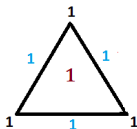
# Móri Tamás - Backhausz Ágnes: A háromszöges modell

Minden lépésben a múlttól függetlenül  $p$  valószínűséggel új csúcs születik

$r$  valószínűséggel



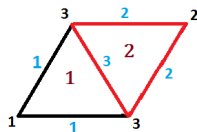
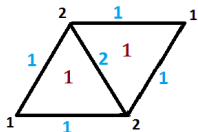
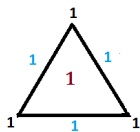
$1-r$  valószínűséggel



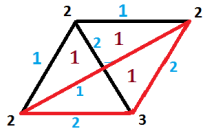
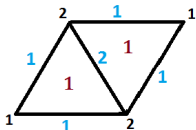
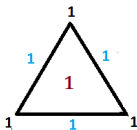
# Móri Tamás - Backhausz Ágnes: A háromszöges modell

Minden lépésben a múlttól függetlenül  $1 - p$  valószínűséggel 3 régi csúcs lép kölcsönhatásba

$q$  valószínűséggel



$1 - q$  valószínűséggel



# Véletlen gráfok: egy 4 pont kölcsönhatásán alapuló modell

Az általunk vizsgált modell az előzőekben ismertett modell általánosítása a "4 pontos esetre".

Modellünk a következő:

(A továbbiakban - az egyszerűség kedvéért - egy négy csúcsú teljes gráfot tetragonnak fogunk nevezni.)

## A modell:

- *Egyetlen tetragonból indulunk ki*
- *Ebben minden klikk kezdeti súlya 1. (A gráf az alábbi klikkeket tartalmazza : 4 csúcs, 6 él, 4 háromszög és egy tetragon.)*
- *Minden lépésben 4 csúcs lép kölcsönhatásba, mely 4 csúcs egy tetragont határoz meg*
- *Az új tetragonban minden klikk súlyát eggyel növeljük*

# Véletlen gráfok: egy 4 pont kölcsönhatásán alapuló modell

A gráf fejlődése:

A múlttól függetlenül,

- $p$  valószínűséggel egy új csúcs születik
  - $r$  valószínűséggel súlyarányosan választunk egy háromszöget a már meglévő háromszögek közül (preferential attachment)
  - $1 - r$  valószínűséggel egyenletesen választunk 3 csúcst (azaz bármely csúcshármaszt egyenlő eséllyel választjuk)
- $1 - p$  valószínűséggel 4 régi csúcs lép kölcsönhatásba
  - $q$  valószínűséggel súlyarányosan választunk egy tetragont a már meglévők közül
  - $1 - q$  valószínűséggel egyenletesen választunk 4 régi csúcst (azaz bármely csúcsnégyest azonos eséllyel választjuk)

$p$ ,  $q$  és  $r$  a modell fix paraméterei.

# Véletlen gráfok: egy 4 pont kölcsönhatásán alapuló modell

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

- $V_n$  : a csúcsok száma  $n$  lépés után
- $X(n, d, w)$  : a  $d$  fokú és  $w$  súlyú csúcsok száma  $n$  lépés után

## Tétel

Legyen  $0 < p < 1$ ,  $q > 0$ ,  $r > 0$  és  $(1 - r)(1 - q) > 0$ . Rögzített  $w$  és  $d$ ,  $1 \leq w$  és  $3 \leq d \leq 3w$  egészekre

$$\frac{X(n, d, w)}{V_n} \rightarrow x_{d,w} \quad (1)$$

teljesül 1 valószínűséggel  $n \rightarrow \infty$  esetén, ahol  $x_{d,w}$  nemnegatív számok.

## Véletlen gráfok: egy 4 pont kölcsönhatásán alapuló modell

## Tétel

Továbbá  $x_{d,w}$  eleget tesz az alábbi rekurzióknak:

$$x_{3,1} = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}, \quad x_{d,1} = 0, \quad \text{ha } d \neq 3,$$

$$x_{d,w} = \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} [\alpha_1 (w-1) x_{d,w-1} + \alpha_2 (w-1) x_{d-1,w-1} + \beta x_{d-3,w-1}], \quad (2)$$

ha  $w \geq 2$ ,  $3 \leq d \leq 3w$ , ahol

$$\alpha_1 = (1-p)q, \quad \alpha_2 = \frac{3}{4}pr, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta = 3(1-r) + \frac{4(1-p)(1-q)}{p}.$$

$x_{d,w} > 0$  ha  $w \geq 1$ ,  $3 \leq d \leq 3w$ , kivéve a  $d = 3w - 1$  esetet. Ha  $d = 3w - 1$ , akkor  $x_{d,w} = 0$ , sőt, ebben az esetben

$$\frac{X(n, d, w)}{V_n} = o(n^{-a}),$$

ahol  $a$  pozitív konstans, mely függhet  $d$ -től és  $w$ -től.

# A modell skálafüggetlensége

Jelölje  $X(n, w)$  a  $w$  súlyú csúcsok számát  $n$  lépés után.

## Tétel (Skálafüggetlenség súlyokra)

Legyen  $0 < p < 1$ ,  $q > 0$ ,  $r > 0$  és  $(1-r)(1-q) > 0$ . Minden  $w = 1, 2, \dots$  esetén

$$\frac{X(n, w)}{V_n} \rightarrow x_w = x_{3,w} + x_{4,w} + \dots + x_{3w,w} \quad (3)$$

teljesül 1 valószínűséggel ( $n \rightarrow \infty$ ), ahol  $x_w$ ,  $w = 1, 2, \dots$  pozitív konstans, mely eleget tesz az alábbi rekurzióknak:

$$x_1 = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}, \quad x_w = \frac{\alpha(w-1) + \beta}{\alpha w + \beta + 1} x_{w-1}, \quad \text{ha } w > 1,$$

ahol

$$\alpha = (1-p)q + \frac{3}{4}pr, \quad \beta = 3(1-r) + \frac{4(1-p)(1-q)}{p}.$$

Továbbá,

$$x_w \sim Cw^{-(1+\frac{1}{\alpha})}, \quad (4)$$

$w \rightarrow \infty$  esetén, valamely  $C = \Gamma(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}) / (\alpha\Gamma(1 + \frac{\beta}{\alpha}))$  pozitív konstanssal.

# A modell skálafüggetlensége

Legyen  $W$  valószínűségi változó az alábbi eloszlással:

$$\mathbb{P}(W = w) = x_w, w = 1, 2, \dots$$

Legyen  $\xi_1 \equiv 3$ , és a  $\xi_2, \xi_3, \dots$  valószínűségi változók függetlenek egymástól és  $W$ -tól.  $w \geq 2$  esetén legyen  $\xi_w$  eloszlása az alábbi:

$$\mathbb{P}(\xi_w = 0) = \frac{\alpha_1 (w - 1)}{\alpha (w - 1) + \beta}, \quad \mathbb{P}(\xi_w = 1) = \frac{\alpha_2 (w - 1)}{\alpha (w - 1) + \beta},$$

$$\mathbb{P}(\xi_w = 3) = \frac{\beta}{\alpha (w - 1) + \beta}.$$

Legyen  $S_w = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_w$ .

# A modell skálafüggetlensége

## Tétel

$\mathbb{P}(S_W = d, W = w) = x_{d,w}$  minden  $w = 1, 2, \dots$ ,  $d = 3, 4, \dots, 3w$  esetén.

## Tétel

Tegyünk fel, hogy  $\alpha_1 > 0$  és  $\alpha_2 > 0$ . Ekkor

$$x_{d,w} = x_w \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha_1\alpha_2 w}} \exp\left(-\frac{(d - \mathbb{E}S_w)^2}{2\mathbb{D}^2 S_w}\right) + O\left(w^{-\frac{1}{2}}\right), \text{ ha } w \rightarrow \infty,$$

ahol a maradéktag nem függ  $d$ -től.

# A modell skálafüggetlensége

## Tétel (Skálafüggetlenség fokszámokra)

Legyen  $0 < p < 1$ ,  $q > 0$ ,  $r > 0$  és  $(1-r)(1-q) > 0$ . Legyen  $\alpha_1$  és  $\alpha_2$  egyszerre pozitívak. Jelölje  $U(n, d)$  a  $d$  fokú csúcsok számát  $n$  lépés után, azaz  $U(n, d) = \sum_{w: \frac{d}{3} \leq w \leq n+1} X(n, d, w)$ .

Ekkor minden  $d \geq 3$  esetén

$$\frac{U(n, d)}{V_n} \rightarrow u_d = \sum_w x_{d,w} \quad (5)$$

teljesül 1 valószínűséggel  $n \rightarrow \infty$  esetén, ahol  $u_d$  pozitív számok. Továbbá,

$$u_d \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\alpha_2 \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)} \left(\frac{\alpha d}{\alpha_2}\right)^{-(1+\frac{1}{\alpha})}, \quad (6)$$

ahol  $d \rightarrow \infty$ .

# További tervek

Általánosított elhelyezési séma:

- Az általánosított elhelyezési séma különböző variánsainak és érdekes speciális eseteinek tanulmányozása
- Határérték tételek igazolása

Véletlen gráfok:

- Általánosítás rögzített  $N$  csúcs esetére
- Az élek súlyára vonatkozó vizsgálatok
- A véletlen gráf modell eredeti konstrukciói újabb variánsai

KÖSZÖNÖM FIGYELMÜKET!!!